Lezione 4

TENSORI:

V sp. vett., dim n

$$T \in \mathcal{T}_h^k = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{h} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V}_{k}$$

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{h} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \quad \text{multilineare}$$

$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ per V base $\rightsquigarrow$ $\mathcal{B}^* = \{v^1, \ldots, v^n\}$ base duale per V^*

$\rightsquigarrow$ base in $\mathcal{T}_h^k(V)$

$$T = T^{i_1 \ldots i_h}_{j_1 \ldots j_k} \; \underline{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_k}}$$

PRODOTTI SCALARI

<u>Def</u>: Un <u>PRODOTTO SCALARE</u> per V è un tensore $(0,2)$ simmetrico g cioè $g(v,w) = g(w,v)$ $\forall v, w \in V$ non degenere. È caratterizzato dalla SEGNATURA (p, m) con $p + m = n$

Se $v_1, \dots, v_n$ è base ortogonale cioè $g(v_i, v_j) = \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

allora $\langle v_i, v_i \rangle$ sono >0 in p casi

<0 in m casi

DEF $+ := (n, 0)$ $\quad p=n$, $m=0$

Se V ha prod. scalare g, allora g induce varie cose:

- $V \xrightarrow{\sim} V^*$ isomorfismo $\quad v \longmapsto (w \longmapsto g(v,w))$ $\quad$ si usa g non deg
- $\tau_h^k = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k} \underset{\text{definito da } g}{\cong} \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h+k} = \tau_{h+k}(V)$

$= \tau^{h+k}(V)$

- V^* ha un prodotto scalare g importato da $V \xrightarrow{\sim} V^*$
- $\tau_h^k(V)$ " " " g indotto da V

definito così: $\qquad$ g in coordinate è g_{ij}

$v, w \in V \qquad g(v,w) = g_{ij} v^i w^j \qquad V \xrightarrow{\sim} V^*$ in coordinate

$v \longmapsto v^*$

Se v^i sono coordinate di v, allora le coordinate di v^* sono semplicemente $v^j g_{ij} = v^*_i = v_i$

$$v^i \rightsquigarrow v^j g_{ij} = v_i$$

Prop: Il prodotto scalare su V^* è un tensore $(2,0)$

Le sue coordinate sono g^{ij} e funziona così:

$$g(v^*, w^*) = g^{ij} v^*_i w^*_j$$

g^{ij} è la matrice inversa di g_{ij} cioè $g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$

Def: $T, U \in \mathcal{T}_h^k(V)$ Definisco il prodotto scalare su $\mathcal{T}_h^k(V)$ indotto da g

$$g(T, U) = \underbrace{T^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k} U^{l_1 \dots l_h}_{m_1 \dots m_k} g_{i_1 l_1} \cdots g_{i_h l_h} g^{j_1 m_1} \cdots g^{j_k m_k}}_{\text{TENSORE DI TIPO } (4h, 4k)} \in \mathbb{R}$$

È ben definito (non dipende da $\mathcal{B}$): composizione di $\otimes$ e C

ALGEBRA SIMMETRICA & ESTERNA

SOLO TENSORI $(0,k)$

$$T \in \mathcal{T}^k_0(V) = \mathcal{T}^k(V) = \{\underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \mathbb{R}\}$$

<u>Def</u>: T è SIMMETRICO se $T(v_1, \dots, v_n) = T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$

$\forall \sigma \in S_n$ permutazione

$\forall v_1, \dots, v_n \in V$

<u>Es</u>: g prod. scal. è $(0,2)$ simmetrico

<u>Def</u>: T è ANTISIMMETRICO se $T(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$

$\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$

<u>Es</u>: $\det$ è $(0,n)$ su $\mathbb{R}^n$ antisimmetrico

$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è $(1,2)$ antisimm.

(ANTI-) SIMMETRIZZAZIONE: $T \in \mathcal{T}^k_0(V)$

$$\underline{S(T) \in \mathcal{T}^k_0(V)}$$

$$S(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

è $(0,k)$ simmetrico

$$A(T)(\dots \dots) = \frac{1}{k!} \sum \mathrm{sgn}(\sigma)\, T(\dots)$$

è $(0,k)$ antisimmetrico

$S^k(V) = \{\text{tensori } (0,k) \text{ simm.}\} \subseteq \mathcal{T}^k(V)$

$\Lambda^k(V) = \{\text{'' '' antisimm.}\} \subseteq \mathcal{T}^k(V)$

$k \geq 2$

Ex: $S^k(V) \cap \Lambda^k(V) = \{0\}$

Ex: $S^k(V) \oplus \Lambda^k(V) \subsetneq \mathcal{T}^k(V)$ tranne $k=2$

$\underline{k=1}$: $S^1(V) = \Lambda^1(V) = V^*$

<u>In coordinate</u>: $T \in \mathcal{T}^k_0(V)$ simmetrico $\iff T_{i_1 \dots i_k} = T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}$ $\forall i_1, \dots, i_k$ $\forall \sigma \in S_k$

antisimm. $\iff T$ '' $= \mathrm{sgn}(\sigma)\, T$ '' '' ''

$$S(T)_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}$$

$A(T)$ '' '' '' '' $\mathrm{sgn}(\sigma)\, T \ldots$

$$S^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(V) \qquad \Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$$

NON SONO SOTTOALGEBRE DI $\mathcal{T}^*(V)$

$\mathcal{T}(V) = \bigoplus \mathcal{T}^k_h(V)$ è un'algebra con $\otimes$

$\Lambda^*, S^* \subseteq \mathcal{T}^*(V) = \bigoplus \mathcal{T}^k_0(V)$ è sottoalgebra '' ''

$\mathcal{T}_*(V) = \bigoplus \mathcal{T}^0_h(V)$ '' '' ''

Due nuove operazioni:

$$T^1, \_\_\_, T^m \in S^*(V) \qquad T^i \in S^{k_i}(V)$$

$$T^1 \odot \cdots \odot T^m \in S^*(V)$$

$$T^1 \odot \cdots \odot T^m = S(T^1 \otimes \cdots \otimes T^m) \in S^{k_1 + \cdots + k_m}(V)$$

PRODOTTO SIMM.

$$\cancel{\binom{k_1 + \cdots + k_m}{k_1, \ldots, k_m}} := \boxed{\frac{(k_1 + \cdots + k_m)!}{k_1! \cdots k_m!}}$$

$\wedge$ $\quad T^i \in \Lambda^{k_i}(V) \qquad T^1 \wedge \dots \wedge T^m \in \Lambda^{k_1+\dots+k_m}(V)$

Idem con A al posto di S

Prop: $(S^*(V), +, \odot)$ e $(\Lambda^*(V), +, \wedge)$ sono algebre associative

Esempio: $v^*, w^* \in V^*$ $\quad v^* \odot w^* = v \otimes w + w \otimes v$

$v^* \wedge w^* = v \otimes w - w \otimes v$

$u^* \odot v^* \odot w^* = u \otimes v \otimes w + u \otimes w \otimes v + w \otimes \dots \dots$

6 perm.

sui covettori è semplice

Prop: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $\rightsquigarrow$ $\{v^1, \dots, v^n\}$ base di V^*

Una base per $S^k(V)$ è $= \{v^{i_1} \odot \dots \odot v^{i_k}\}_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n}$

$T^k(V)$ è $= \{v^{i_1} \otimes \dots \otimes v^{i_k}\}$

$\Lambda^k(V)$ è $= \{v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_k}\}_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}$

Fatto: $v \in V^* \Rightarrow v \wedge v = 0$ $\quad v, w \in V^* \Rightarrow v \wedge w = - w \wedge v$

$v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_k}$

Cor: $\dim S^k(V) = \binom{n+k-1}{k} \Rightarrow \dim S^*(V) = +\infty$

$\boxed{\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}} \Rightarrow \dim \Lambda^*(V) = 2^n$

Cor: $S^*(V)$ algebra commutativa

$\Lambda^*(V)$ algebra "anticommutativa" infatti:

$T \in \Lambda^p(V) \quad U \in \Lambda^q(V) \quad T \wedge U = (-1)^{p \cdot q} U \wedge V$

dim: è vero sulle basi

Cor: Se k dispari, $T \in \Lambda^k(V) \Rightarrow T \wedge T = 0$

perché $T \wedge T = - T \wedge T \Rightarrow T \wedge T = 0$.

Cor: $\Lambda^n(V) \cong \mathbb{R}$ isom. non canonico

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V \rightsquigarrow \{v^1, \dots, v^n\}$ base di V^*

$\rightsquigarrow$ $v^1 \wedge v^2 \wedge \dots v^n$ è base di $\Lambda^n(V)$

$\det \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$

$\det = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$

Prop: Se $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base di V

$\{w^1, \dots, w^n\}$ di V^*

$v^i = A^i_j w^j \implies$

$$\boxed{v^1 \wedge \dots \wedge v^n = \det A \; w^1 \wedge \dots \wedge w^n}$$

Oss: Orientazione per V = orientazione per $\Lambda^n(V)$

n 1

CONTRAZIONI: $v \in V$ induce mappa

$c_v : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{k-1}(V)$

$$T \longmapsto i_v(T) : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-1} \to \mathbb{R}$$

$$i_v(T)(v_1, \dots, v_{k-1}) = T(v, v_1, \dots, v_{k-1})$$

$$i_v = c(T \otimes v)$$

T $(0,k)$ $\quad$ $T \otimes v$ $(1,k)$

v $(1,0)$

$c(T \otimes v)$ $(0, k-1)$

FUNTORIALITÀ

$L : V \to W$ lineare $\quad$ induce $\quad$ $L_* : \mathcal{T}_*(V) \to \mathcal{T}_*(W)$

$L^* : W^* \to V^*$ $\quad$ $L^* : \mathcal{T}^*(W) \to \mathcal{T}^*(V)$

componendo con L

è funtoriale: $\quad (L \circ L')_* = L_* \circ L'_* \qquad id_* = id$

$(L \circ L')^* = (L')^* \circ L^* \qquad id^* = id$

L isom $\Rightarrow L^*, L_*$ isom

NOTA: $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$

$L : V \to W$

Più in generale, $L: V \xrightarrow{\sim} W$ induce $L_*: \mathcal{T}_h^k(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_h^k(W)$

COVARIANZA E CONTROVARIANZA

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[loop below, "T"] & W \arrow[loop above, "T"] \end{tikzcd}$$

$L: V \to W$

$L: V \to W$

$$T: \underbrace{W \times \cdots \times W}_{} \to \mathbb{R}$$

$$T \in \mathcal{T}_0^k(W) \to L^*(T) \in \mathcal{T}_0^k(V)$$

$$\begin{tikzcd} V \times \cdots \times V \arrow[r, "L \times \cdots \times L"] \arrow[rr, dashed, bend right] & W \times \cdots \times W \arrow[r, "T"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$